TD 29 : Matrices et applications linéaires

Matrices de vecteurs et d'applications

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,-2),(-4,1,3),(0,5,-3))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice du vecteur $x = (8,3,-3) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (*De morphisme à matrice*)**.** Déterminer les matrices dans les bases canoniques des morphismes suivants :

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $\qquad f(x,y,z) = (-x+2z, 3x-4y, -5x+6z, -7y+8z)$
2) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\qquad f(P) = (P(-1), P(2))$
3) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\qquad f(P) = P(X+1) - P(X)$
4) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (*De matrice à morphisme*)**.** On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les expressions des morphismes f et g canoniquement associés à A et B. Déterminer, lorsque cela a un sens, les matrices dans les bases canoniques de $f+g$, de $f \circ g$, de $g \circ f$, de f^{-1}, de g^{-1}, de $(f \circ g)^{-1}$ et de $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\qquad f(P) = 2P + XP'$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques (de départ et d'arrivée).
2) Montrer que f est un isomorphisme, et déterminer la matrice associée à f^{-1} dans les bases canoniques.
3) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. En déduire l'expression de $f^{-1}(aX^2 + bX + c)$.
4) Avec la même méthode, déterminer l'expression des applications réciproques des morphismes suivants :
   (a) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\qquad f(P) = (P(1), P(2), P(3))$
   (b) $\Phi : E \to E$ définie par $\qquad \Phi(f) = f' - f, \quad$ avec $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$

Exercice 5 (*Endomorphismes nilpotents*)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$, où l'on note $u^k := \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

1) Justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0_E$.
2) Démontrer que $\mathcal{B} = (a, u(a), u^2(a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, qu'on notera A.
4) Déterminer le commutant de A, i.e. l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
5) Soit $F = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid v \circ u = u \circ v\}$. Déduire de la question précédente que $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2)$, où l'on note id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Changements de base(s)

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (3x-y,-2x+7y)$.

1) Écrire la matrice A canoniquement associée à f.
2) Soit $u=(1,-1)$ et $v=(2,3)$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer la matrice de f dans la base (u,v).

Exercice 7. Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}$.
2) En déduire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_c$, .
3) On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x,y,z) = (2x+2y+z,-2x-y,x+y-z)$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f \circ f \circ f$.

Exercice 8. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) est :

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1+3e_2+e_3 \qquad e'_2 = 3e_1+4e_2+e_3 \qquad e'_3 = e_1+2e_2+2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 9. Soit $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à B^k.

Exercice 10. Soit $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que si A,B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ les matrices $A-\lambda I_n$ et $B-\lambda I_n$ sont aussi semblables.
2) Est-ce que les matrices suivantes sont semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Noyau, image, projecteurs, symétries revisités

Exercice 11. Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D$.

Exercice 12. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, avec

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\} \qquad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

1) Déterminer une base $\mathcal{B}$ adaptée à F et G.
2) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
3) En déduire une expression de $p(x,y,z)$.

Exercice 13. On pose $S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et s l'endormorphisme canoniquement associé à S.

1) Montrer que s est une symétrie.
2) Déterminer ses éléments caractéristiques.
3) En déduire une base $\mathcal{B}$ pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ est simple et donner cette matrice.

Exercice 14. Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est une symétrie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2) Déterminer sa matrice canoniquement associée.

Exercice 15 ($\star$)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$

1) À quelle condition sur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ la matrice D est-elle la matrice d'un projecteur ? D'une symétrie ?
2) Montrer que tout projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ ou symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ peut être représenté par une matrice diagonale dans une base bien choisie. *(Cette matrice vérifie alors nécessairement la condition trouvée en question 1)*

Trace

Exercice 16. En utilisant la trace, montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 17. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On suppose que $\mathrm{Tr}\,(AA^\top) = 0$. Montrer que $A = 0$.
2) On suppose que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}\,(AM) = \mathrm{Tr}\,(BM)$. Déduire de la question précédente que $A = B$.